

# 基于凸包的棋盘格角点自动识别与定位方法\*

熊会元, 宗志坚, 余志, 陈承鹤  
(中山大学工学院, 广东 广州 510275)

**摘要:** 采用 Harris 方法提取角点, 应用对称算子剔除棋盘格外圈角点与伪角点, 基于灰度梯度方法精确提取棋盘格亚像素角点。在此基础上, 提出了基于凸包的棋盘格角点分层识别与自动定位方法, 实现了棋盘格角点物像坐标的自动匹配, 从而可实现摄像机自动精确标定。实验结果表明, 该方法具有较高的精度与可靠性, 适合于摄像机在线自标定。

**关键词:** Harris 算子; 凸包; 摄像机标定; 角点提取

**中图分类号:** TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579(2009)01-0001-05

## Automatic Extracting and Locating Checkerboard Corners Method Based On Convex Hull

XIONG Huiyuan, ZONG Zhijian, YU Zhi, CHENG Chenghe  
(School of Engineer, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** By extracting checkerboard corners with Harris algorithm, a symmetry algorithm was proposed to identify the all inner-corners and eliminate outer-corners and false corners of the checkerboard form primal corners muster. The method based on gray gradient was adopted for accurately extracting checkerboard corners. To distinguish the outer loop corners and automatic locate the corners form the corners muster of the checkerboard, a new method based on convex hull was presented, which can loop by loop recognize and sort all the corners. As a result, the image dots can be automatically matched with its corresponding physical dots, thus, parameters of camera were automatically and accurately calibrated. Experiments shows the method has high precision and preferable robust, and is especially adapted for the automatic online camera calibration.

**Key words:** Harris algorithm; convex hull; camera calibration; corner detecting

基于棋盘格的摄像机标定中, 角点提取的精度与物像坐标的匹配是该算法的重要环节。现有角点提取方法可分为三类<sup>[1]</sup>: 一是根据图像边缘特征, 由边缘夹角<sup>[2]</sup>或曲率<sup>[3]</sup>来判断是否为角点; 二是利用图像的灰度信息, 如 Susan 算法<sup>[4]</sup>; 三是利用图像的灰度变化率, 如 Harris 算法<sup>[5]</sup>。Schmid 等<sup>[6]</sup>认为, Harris 算法是目前最好的一种方法。该方法使用图像的一阶差分, 计算每个像素的平均平方梯度矩阵, 通过特征值分析得出角点的响应; 不受摄像机姿态、光照、噪声等影响, 具有效率高和

较强的稳定性及鲁棒性。但该算法的不足是提取的精度只有像素级, 角点集包含外圈角点与格单元边缘上的伪点(图1所示绿色箭头所指), 且点集中角点排序混乱。这样标定时, 需手动完成角点像与物坐标匹配。

本文在 Harris 算法基础上, 利用棋盘格内角点的对称性, 设计对称算子, 剔除外圈角点与伪角点。在此基础上, 应用角点处灰度梯度算法, 获取棋盘格亚像素角点。最后, 在角点集中应用凸包算法分层识别并自动定位角点, 实现角点物与像坐标

\* 收稿日期: 2008-06-16

基金项目: 广东省自然科学基金资助项目(06300319); 国家企业技术创新基金资助项目(08C26214411233)

作者简介: 熊会元(1973年生), 男, 讲师, 博士生; E-mail: xionghy@mail.sysu.edu.cn

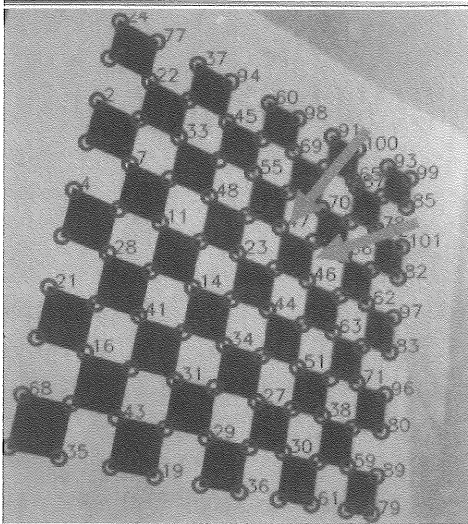


图1 Harris提取角点图

Fig. 1 Extracting corners with Harris algorithm

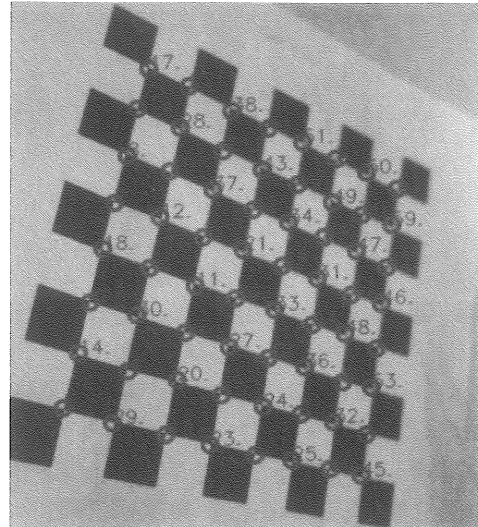


图2 应用对称算子识别内部角点图

Fig. 2 Identify the inner corners with symmetry algorithm

的自动匹配,进而可实现摄像机精确快速标定。

## 1 棋盘格内部角点识别与亚像素提取

### 1.1 基于对称算子的内部角点识别

Harris 提取的角点集中,外圈角点受边界环境影响,角点提取的精度不高,不易作为标定点,因而应从点集中剔除。从棋盘格布局中可以看出,棋盘格内部角点具有以角点为中心,周围的灰度分布具有对称性特点;而外圈角点与格单元边缘上伪角点则不具备,据此原理定义如下式的对称算子<sup>[7]</sup>:

$$c^s(i,j) = \frac{1}{n} \cdot$$

$$\sum_{(i+p,j+q) \in w} |I(i+p,j+q) - I(i-p,j-q)| \quad (1)$$

其中,  $I(i,j)$  为角点  $(i,j)$  处的灰度值,  $w$  为以  $(i,j)$  为中心的窗口,可根据图像中棋盘格单元大小设定,  $n$  为  $w$  中角点对称对的数量。

可通过设定  $c^s$  的域值来区分角点是否为内部角点,其中小于域值的角点则认为是内部角点。图2为  $w$  取  $15 \times 7$ ,  $c^s$  域值取 65,对图1中棋盘格进行的识别结果图。

### 1.2 亚像素角点精确提取

为得到更高的角点精度,在 Harris 算法提取角点后,利用角点处灰度梯度获得亚像素级角点精度。文献[8]提到两种算法,其中基于灰度梯度的算法精度更高,应用较广,其原理如下:

设 Harris 算法提取的角点为  $p$ , 则  $p$  指向领域内任意一点  $q_i$  的向量都与  $q_i$  的灰度梯度垂直。其表达式如下:

$$\varepsilon_i = \nabla(I)_{q_i}^T \cdot (p - q_i) \quad (2)$$

式中,  $\nabla(I)_{q_i}^T$  表示  $q_i$  处的灰度梯度,考虑噪声等影响,两矢量点积不为零,而是一个小量  $\varepsilon_i$ 。则  $p$  点的精确值应为使  $\varepsilon_i$  最小的点的坐标,可通过迭代求解获得  $p$  点处的亚像素精度坐标。

## 2 基于凸包的角点分层识别与自动定位

摄像机标定的另一个环节是棋盘格角点的空间坐标与图像坐标的匹配。文献[9]应用平行线共灭点的原理,先确定中心格四角点,作直线求灭点,后由灭点与角点的距离来排序,依次确定其他栅格线上角点;文献[10]提出由中心角点出发,以图像  $x$  与  $y$  方向的动态增量  $d_x$  与  $d_y$  来预测和递推其他角点;上述算法受摄像机畸变影响较大,操作较复杂。由于棋盘格角点具有栅格排列与分层排列的特征,作者发现凸包算法能很好的识别与定位角点集中外层凸点;在凸包中,应用凸度识别并定位转角点,进而可识别与定位整个棋盘格角点。

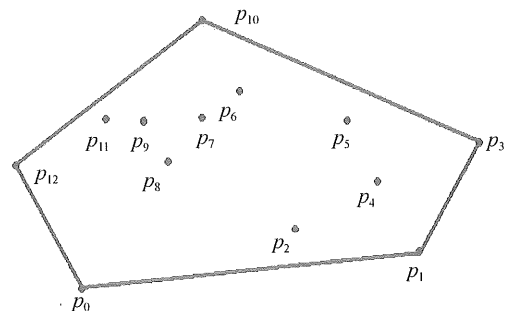


图3 凸包概念图

Fig. 3 Concept of convex hull

2.1 凸包的概念

平面点集的凸包定义为对平面上一个点集  $S$ ，或一个多边形  $P$ ，其凸包是指包含  $S$  或  $P$  的最小凸多边形。如下图中线段表示的多边形就是点集  $S = \{p_0, p_1, \dots, p_{12}\}$  的凸包。

定义 1 设  $P$  为逆时针排序的凸多边形，其顶点的序列为  $\{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ ，记  $T(P)$  为  $P$  的凸包， $L(p_i, p_{i+1})$  为顶点  $p_i$  与  $p_{i+1}$  的直线连接， $TL(p_0, p_{n-1}) = \{L(p_0, p_1), \dots, L(p_{i-1}, p_i), \dots, L(p_{n-1}, p_0)\}$  为凸包  $T(P)$  的直线集。

定义 2 设  $p_{i-1}, p_i$  和  $p_{i+1}$  为  $T(P)$  上的连续点，记  $\overline{C(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})} = p_{i-1} - p_i \times p_{i+1} - p_i$ ，称  $\overline{C(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})}$  为  $T(P)$  上  $p_i$  相对于  $p_{i-1}, p_{i+1}$  的凸度。

2.2 角点分层识别与自动排序

基于凸包的角点分层识别与自动排序包括角点集凸包的识别、凸包中的四个转角点识别与定位、同层角点的全识别与排序，以及角点全识别与排序等四个步骤。具体如下：

步骤一 角点集凸包的识别

① 设  $Q_0$  为  $m \times n$  棋盘格角点的点集，取点  $p_0$  ( $p_0 \in Q_0$  且  $p_0$  的  $x$  坐标最小，如有多个相等的最小值，则取其中  $y$  坐标最小的点)；

② 以  $p_0$  为中心，计算  $p_i$  ( $p_i \in (Q_0 - p_0), i = 1, \dots, m \times n - 1$ ) 相对于  $p_0$  的极角，并以逆时针方向对极角排序，若极角相等，取离  $p_0$  最远的点，则可得点集  $P$  ( $P = \{p_0, \dots, p_i, \dots, p_r\}$ ，其中  $r \leq m \times n - 1$ )；

③ 在点集  $P$  中，依次求  $p_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) 点的凸度  $|\overline{C(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})}|$ ；

若  $|\overline{C(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})}| < 0$ ，则点  $p_{i+1}$  在  $L(p_{i-1}, p_i)$  的左边， $p_i$  为凸点，保留  $p_i$ ；

若  $|\overline{C(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})}| = 0$ ，则  $p_{i-1}, p_i$  与  $p_{i+1}$  三点共线，保留  $p_i$ ；

若  $|\overline{C(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})}| > 0$ ，则点  $p_{i+1}$  在  $L(p_{i-1}, p_i)$  的右边， $p_i$  为凹点，须从点集  $P$  中剔除  $p_i$ ；

最后得到点集  $P = \{p_0, \dots, p_i, \dots, p_k\}$  (其中  $k \leq r$ ) 所构成的多边形即为点集  $Q_0$  的凸包  $T(P)$ 。图 4 为应用本算法获得图 2 棋盘格点集的凸包图，由 9 个顶点组成。

步骤二 凸包中棋盘格转角点识别与定位

① 在凸包  $T(P)$  中，如果顶点的凸度  $|\overline{C(p_{i-1}, p_i, p_{i+1})}|$  按大到小的排序，则前四个顶点就为棋盘格转角点，分别记为  $p_0, p_1, p_2$  与  $p_3$ ；

② 求  $p_0, p_1, p_2$  与  $p_3$  的质心  $p_c(x, y)$ ；

$$x = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i, y = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i \quad (3)$$

计算向量  $\overline{p_c p_i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的方位角，则可识别相对于  $p_c$  为左上角的转角点，以该点为凸包的起始点  $p_0$ ，重新对凸包  $T(P)$  排序，得到新的凸包  $T'(P)$ ，其点集为  $P' = \{p_0, \dots, p_i, \dots, p_k\}$ 。

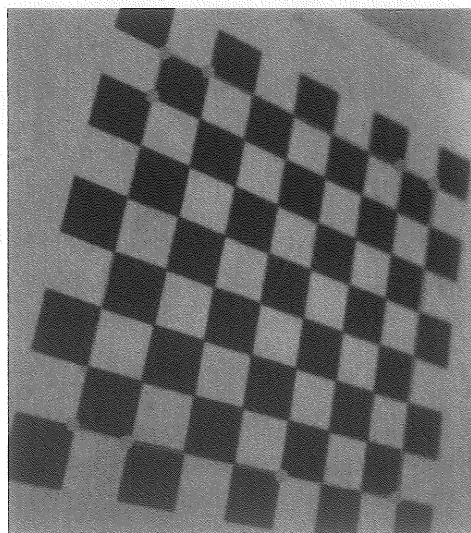


图 4 棋盘格角点集凸包

Fig. 4 The convex hull of corners muster of the checkerboard

步骤三 同层角点的识别与排序

依次取凸包  $T'(P)$  直线集上直线  $L(p_i, p_{i+1})$  ( $L(p_i, p_{i+1}) \in T'L(p_0, p_k); i = 0, 1, \dots, k$ )，任取角点  $q_l \in (Q_0 - P')$  ( $l = 0, 1, \dots, m \times n - 1 - k$ )，求到直线  $L(p_i, p_{i+1})$  的垂足  $f_l$  与距离  $d_l$ 。设判断点在直线上的距离域值为  $\varepsilon_d$ ，若  $d_l \leq \varepsilon_d$  且  $f_l$  在直线段  $L(p_i, p_{i+1})$  的  $p_i$  与  $p_{i+1}$  点之间，则认为点  $q_l$  为直线  $L(p_i, p_{i+1})$  上的点，并将  $q_l$  按  $|p_i - q_l|$  距离由近至远的次序插入点集  $P'$ ，遍历  $T'(P)$  上的直线集后可得左上角点  $p_0$  为起始点，逆时针存储的棋盘格同层角点的点序集  $P'$  ( $P' = \{p_0, \dots, p_i, q_l, p_{i+1}, \dots, p_k\}$ )。

步骤四 角点的全识别与排序

设剩余角点集  $Q_1$  ( $Q_1 = Q_0 - P'$ )，重复步骤一至步骤三，则可完成第二层角点的识别与排序。循环  $m$  (如  $m < n$ ) 次后，剩余点集为  $Q_m$ ， $Q_m$  近似为直线，计算质心  $p_c(x, y)$ ，由  $\overline{p_c p_i}$  的方向与距离进行排序，则可实现全角点识别与排序。图 5 按凸包算法分层识别次序的排序图；图 6 则转化为按行列的次序进行排序的图，其中同一层上的顶点直

径由小到大表示该层  $p_0$  到  $p_3$  转角点排列。

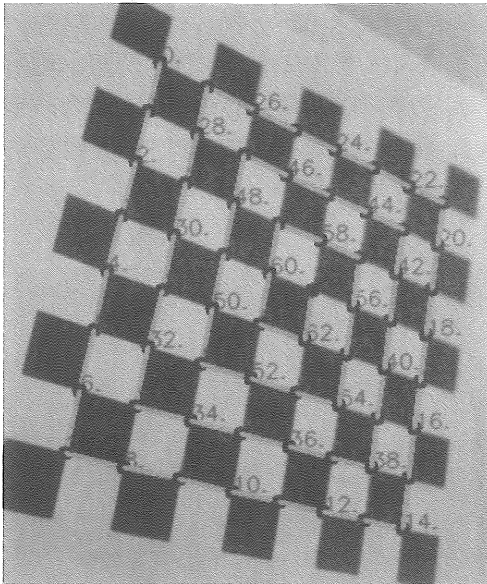


图 5 按凸包次序排序图

Fig. 5 Sorted in convex hull

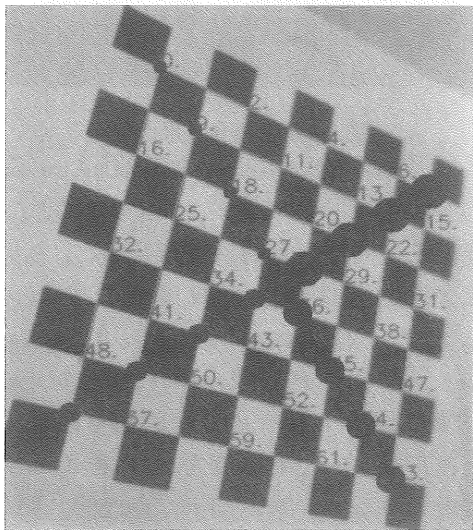


图 6 行列次序排序图

Fig. 6 Sorted in row

### 3 实验与结果分析

用 Visual C++ 6.0 编程实现了上述算法, 用图 7 示数控实验平台, 采用 Watec 902B 摄像机,  $f = 25 \text{ mm}$  镜头, 拍摄 15 位置棋盘格图像 (见图 8), 用本文算法完成角点精确提取与分层识别排序, 用 Zhang<sup>[11]</sup> 完成标定; 为进行对比实验, 同时应用经典的基于 Matlab 摄像机标定程序<sup>[12]</sup>, 实现角点手动提取与定位, 并标定, 其标定对比结果如表 1。

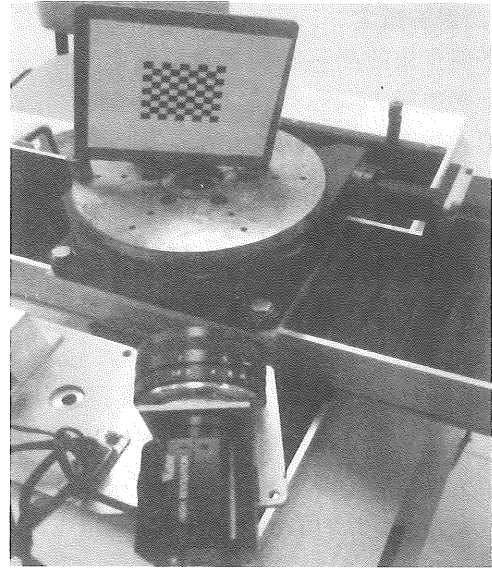


图 7 实验图

Fig. 7 Experiment equipment

表 1 对比实验结果表

Table 1 Results of the contrastive experiment

	本文方法	文献[12]	误差
$f_x, f_y$	3 458. 930 22	3 460. 361 75	1. 431 53
	3 479. 795 69	3 481. 279 76	1. 484 07
$u_0, v_0$	298. 649 00	300. 108 91	1. 459 91
	340. 368 28	340. 953 45	0. 585 17
$k_1, k_2$	-0. 500 16	-0. 504 46	-0. 004 3
	9. 138 88	10. 089 23	0. 950 35
$p_1, p_2$	0. 003 20	0. 003 47	0. 000 27
	-0. 000 61	-0. 000 88	-0. 000 27
计算时间/s	21. 6	298	

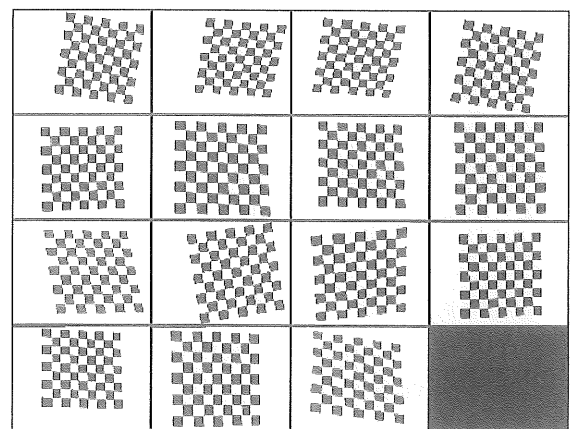


图 8 拍摄 15 位置标定图像

Fig. 8 Fifteen images for calibration

由上述实验可以看出, 两种方法标定结果焦距  $f_x, f_y$ , 主点  $u_0, v_0$  以及畸变系数 ( $k_1, k_2, p_1, p_2$ ) 十分接近, 误差较小。但本文方法可全自动实现, 整

个标定时间仅为 21.6 s, 而文献[12]需要手动提取, 所需时间需要 298 s。

## 4 结 语

本文应用 Harris 算子与基于角点处灰度梯度方法提取棋盘格角点, 角点精度达亚像素。采用对称算子剔除棋盘格外圈角点与伪角点, 实现棋盘格内角点的识别方法有效。提出的基于凸包的棋盘格角点的分层识别与自动定位方法可快速自动地实现物像坐标的匹配, 进而实现摄像机自动标定。实验结果证明了方法的正确性与可靠性, 适用于摄像机在线自标定。

### 参考文献:

- [1] 张兆伟, 赵字明, 胡福乔, 等. 基于样条小波的增强算法在角点提取中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2006, 15: 56 - 58.  
ZHANG Z W, ZHAO Y M, HU F Q, et al. Corner extraction based on spline wavelet enhancement[J]. Computer Engineering and Applications, 2006, 15: 56 - 58.
- [2] HSIN T, HU W C. A rotationally invariant two-phase scheme for corner detection [J]. Pattern Recognition, 1996, 28(5): 819 - 829.
- [3] MEDIONI G, YASUMOTO Y. Corner detection and curve representation using cubic B-spline[J]. Computer Vision Graphics Image Process, 1987, 39(3): 267 - 278.
- [4] SMITH S, BRANDY J M. SUSAN—a new approach to low level image processing[J]. Journal of Computer Vision, 1997, 23(1): 45 - 78.
- [5] HARRIS C, STEPHENS M. A combined corner and edge detector[C]. Proceedings of the Fourth Alvey Vision Conference, Manchester, England, 1988: 147 - 151.
- [6] SCHIMID C, MOHR R, BAUCKHAGE C. Evaluation of interest point detectors [J]. International Journal of Computer Vision, 2000, 37(2): 151 - 172.
- [7] 刘阳成, 朱枫. 一种新的棋盘格图像角点检测算法[J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(5): 656 - 660.  
LIU Y C, ZHU F. A new algorithm for X-corner detection[J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(5): 656 - 660.
- [8] 梁志敏, 高洪明. 摄像机标定中亚像素级角点检测算法[J]. 焊接学报, 2006, 27(2): 102 - 105.  
LIANG Z M, GGO H M. Sub-pixels corner detection for camera calibration[J]. Transactions of the China Welding Institution, 2006, 27(2): 102 - 105.
- [9] 王忠石, 徐心和. 棋盘格模版的自动识别与定位[J]. 中国图象图形学报, 2007, 12(4): 618 - 622.  
WANG Z S, XU X H. Auto-recognition and auto-location of the checkerboard pattern corner[J]. Journal of Image and Graphics, 2007, 12(4): 618 - 622.
- [10] 刘群根. 基于梯度与对称度提取棋盘格角点及角点递推定位[J]. 测控技术, 2008, 27(1): 7 - 9.  
LIU Q G. Extracting checkerboard corners based on gradient & symmetry and locating with Iteration [J]. Measurement & Control Technology, 2008, 27(1): 7 - 9.
- [11] ZHANG Z. A flexible new technique for camera calibration[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(11): 1330 - 1334.
- [12] BOUGUET J Y. Camera calibration toolbox for Matlab [EB/OL]. [http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib\\_doc/htmls/example.html](http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/htmls/example.html).